APLICACION DEL METODO DE VON ZEIPEL AL ASTEROIDE VALENTINE (447)

C.A.Altavista
(Observatorio Astronómico,La Plata)

Este informe es una relación ampliada del que fué presentado en ocasión de la última sesión de esta Asociación Argentina de Astronomía.

El planetita Valentine ha merecido una investigación exhaustiva por parte de H.Osten, en una serie de memorias aparecidas en el Astronomische Nachrichten. El método usado por este autor es el de Hansen. La presente es una aplicación numérica de una teoría puramente analítica.

Los elementos referidos a la época 1899 XI 6 y al equinoccio 1950 son:

$$M = 359^\circ 061 \; ; \; \omega = 319^\circ 305 \; ; \; \Omega = 73^\circ 024 \; ; \; i = 4^\circ 819$$
$$\varphi = 2^\circ 576 \; ; \; \mu = 687''394 \; ; \; a = 2.9868$$

En la presente investigación, Júpiter es el único planeta incluído en la teoría. Este criterio está apoyado por las consideraciones hechas por C.M.Clemence en una memoria publicada en The Astronomical Journal, Vol.52 N° 4,pág.89: "que la experiencia parece justificar la conclusión que para la mayoría de los planetas menores una teoría general aproximada que incluya sólo perturbaciones de primer orden de Júpiter, será suficiente para computar efemérides de búsqueda por un período de tiempo más bien largo, tal vez una o dos centurias desde la época de la teoría ".

Con este objeto el Dr. Clemence ha preparado una tabla de elementos tabulados de diez en diez años, de los cuales se han tomado los referidos a la época Enero 0.5 U.T., eclíptica y equinoccio medios,1950.0:

$$L = 316^\circ 30968 \; ; \; n = 3034''70157 \; ; \; e = 0.04846063$$
$$\omega = 13^\circ 94479 \; ; \; i = 1^\circ 30710 \; ; \; \Omega = 99^\circ 80204 \; ; \; a = 5.202981$$

La diferencia de épocas para la consideración de los elementos de partida para ambos cuerpos, puede significar la necesidad de recalcular la primera aproximación, en caso que el acuerdo entre la teoría y las observaciones no sea satisfactorio. Este procedimiento ha sido adoptado previa consulta con el Prof. Brouwer. A mi juicio un camino plausible consiste en efectuar una integracion numérica previa sobre el arco que abarque las observaciones disponibles, para luego efectuar el correspondiente mejoramiento de los elementos iniciales.

La solución analítica del problema consiste en integrar el siguiente sistema de ecuaciones canónicas:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial e} & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial g} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k} & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K} \end{aligned} \tag{1}$$

donde L, G, H, constituyen el grupo de variables de Delaunay no angulares, y l, g, h, constituyen un grupo de variables angulares.

El sistema tiene cuatro grados de libertad. Las variables K y k, se han introducido para evitar la aparición explícita del tiempo en el Hamiltoniano del sistema.

Se tiene en ambos grupos:

$$F = F_o + F_1$$

$$F_o = \frac{\mu^2}{2L^2} - \nu K$$

$$F_1 = \Sigma\, C^{m_2, m_3, m_4}_{P_1, P_2, P_3, P_4}\, e^{m_2} (\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} I)^{2m_3} e_1^{m_4} \cos (P_1 l + P_2 g + P_3 h + P_4 k)$$

Precisamente la aparición del término complementario en el Hamiltoniano F_o responde al aumento del grado de libertad del sistema.

Por otra parte es:

$$\frac{dk}{dt} = \nu = -\frac{\partial F}{\partial K}$$

donde ν representa el movimiento medio de Júpiter.

Para integrar el sistema de ecuaciones (1), se debe obtener de acuerdo a los principios que forman el fundamento del método una función determinante S. En la primera aproximación, es posible elegir la función S, tal que resulten eliminados los términos de corto período (en las soluciones para las variables antes mencionadas) que dependen de los argumentos g y h.

En esta aproximación S es de la forma:

$$S_1 = \Sigma' \frac{C'}{p_1 n' + p_4 \upsilon} \operatorname{sen} (p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k)$$

El apóstrofe indica que los términos incluídos en la sumatoria son términos de F en los cuales uno de los coeficientes p_1 ó p_4 es diferente de cero.

El Hamiltoniano de esta aproximación es de la forma:

$$F_1^* = \Sigma'' C' \cos (p_2 g' + p_3 h')$$

En F_1^* están presentes los términos para los cuales $p_1 = p_4 = 0$.

Estado presente de los cálculos

Un cálculo sencillo muestra que, si se desea preparar la presente investigación para una aproximacion más refinada, deben tenerse en cuenta para el cálculo de las variables no angulares términos que dependen del cuarto grado en las excentricidades e inclinación mútua de ambas órbitas. Especial atención merecen algunas combinaciones de los movimientos medios de Júpiter (υ) y Valentine (n'). Por ejemplo:

$$7\, \upsilon/n' - 3 = + 0.0445275$$
$$9\, \upsilon/n' - 4 = - 0.0856075$$
$$5\, \upsilon/n' - 2 = + 0.174662$$

Para el caso de las variables angulares, la pérdida de dos grados en las potencias de la excentricidad del asteroide y la inclinación mútua de ambas órbitas, obliga si se mantiene el criterio antes enunciado a considerar términos de sexto grado en el desarrollo de la función perturbadora.

Los desarrollos han sido tomados directamente de los dados por Leverrier en el primer volumen de los Anales del Observatorio de Paris, de acuerdo al siguiente detalle:

Términos de orden cero:

Términos de órdenes dos y cuatro con igual argumento que los de orden cero.

Términos de orden segundo

Términos de cuarto orden con igual argumento que términos de segundo orden.

Términos de tercer orden

Términos de quinto orden con igual argumento que términos de orden tres.

Términos de cuarto orden

Términos de sexto orden con igual argumento que términos de cuarto orden.

Términos de quinto orden

El criterio para la consideración de sexto orden está basado en el criterio dado por la primera de las combinaciones de movimientos medios antes aludidas.

Se sobreentiende que el vocablo orden tiene el significado de grado. Aquí se ha mantenido la nomenclatura de Leverrier.

El inconveniente que presenta el desarrollo de la función perturbadora dado por Leverrier, esto es, la presencia de variables no keplerianas en el desarrollo, se puede obviar adoptando como plano de referencia al del plano perturbador, que se supone fijo.

El desarrollo de la función perturbadora debido a Newcomb no presenta tal dificultad. No se lo ha adoptado por no haber contado en el momento oportuno con una verificación de los cálculos de este autor. Tal tarea se realizó en el Observatorio de La Plata, pero no en el grado de precisión requerido por la presente teoría.

En lo que respecta a la aplicación numérica se han calculado todos los términos que dependen de los coeficientes de Laplace y sus derivadas de acuerdo al detalle antes mencionado. Se han verificado prácticamente todos los cálculos hasta los términos cuyos coeficientes son de quinto grado respecto a las excentricidades y la inclinación mutua de ambas órbitas.

En base a estos cálculos se han obtenido las series que corresponden a los elementos no angulares y la serie que determina el valor de la longitud del nodo, previa eliminación de los términos de corto período. Idéntico procedimiento se está llevando a cabo para determinar las series que dan las dos restantes variables angulares, la longitud del perihelio y la longitud media.

Para el cálculo de los coeficientes de Laplace para los índices $i = 1, 2, \ldots 11$, $s = 1/2, 3/2, 5/2$, se utilizaron las tablas logarítmicas preparadas por Brown y

Brouwer. El argumento de esas tablas es la magnitud $p = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$.

Como los cálculos demostraran, en la parte correspondiente a la determinación de las variables no angulares, la necesidad de extender tales valores de los coeficientes de Laplace hasta el índice $i = 16$, para $s = 1/2$, se recurrió a un método ideado por Gauss.

En la parte correspondiente a la determinación de las variables angulares, se hace necesaria una nueva extensión de cálculos para dichos coeficientes. El centro de cómputos de Yale ha calculado, siguiendo un procedimiento debido a Innes, todos los valores de esos coeficientes y sus correspondientes derivadas de tal modo de satisfacer las exigencias requeridas en nuestros cálculos. Una transformación previa será necesaria para el uso de los valores así obtenidos, pues el método de Innes está conectado con el procedimiento seguido por Newcomb para obtener el desarrollo de la función perturbadora.

El estado presente de la teoría permite preveer que estaremos en condiciones de contar con la determinación preliminar completa en el curso de 1964. Esta investigación continuará durante los años 1964 y 1965.

Summary:

APPLICATION OF VON ZEIPEL'S METHOD TO THE ASTEROID VALENTINE (447)

The main problems which arise in the application of this method are connected with the accuracy of terms of higher order in the development of the disturbing function:

1) Because of the presence of small divisors, now it is rather difficult to set up rules to search for the complete set of terms for a preestablished accuracy.

2) The fact that in Leverrier's developments the coefficients of the A_i^j's are unbounded when the index i increases in absolute value puts the problems of accuracy under severe conditions.

The calculations show that the A_i^j's tend to zero for those values of i.

For these reasons the resulting coefficients in the expansions, in the case

of terms of higher order, are extremely inaccourate, unless a special criterium is devised to build up a set of "absolute" values for the initial values of the orbital constants.

3) The calculations have also shown that Poincaré's variables are quite suitable for the present purposes.

The above mentioned issues are closely connected with the problem of finding out an adequate program for high speed calculators.